Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XI-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Fie A, B, C trei matrice de ordin 3, care au elemente numere reale şi care îndeplinesc condiţiile: $\det(A+iB)=\det(C+iA)$ şi $\det(A)=\det(B)=\det(C)$. Arătaţi că $\det(A+B)=\det(C+A)$.

Soluţie. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det(A+xB)-\det(C+xA)$ (**1 punct**). Această funcţie este polinomială şi are grad ≤ 3 (**1 punct**). Din ipoteză, coeficientul lui x^3 este $\det(B)-\det(A)=0$, $f(0)=\det(A)-\det(C)=0$ şi $f(i)=\det(A+iB)-\det(C+iA)=0$ (**3 puncte**). Rezultă că funcţia este de forma $f(x)=ax^2+bx$, cu $-a+bi=0, a,b\in\mathbb{R}$, deci $a=b=0$, $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $\det(A+B)-\det(C+A)=f(1)=0$ (**2 puncte**).

Problema 2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi o matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$, cu proprietatea: $a_{ij}+a_{jk}+a_{ki}=0, \forall i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Arătaţi că $\operatorname{rang}(A)\leqslant 2$.

Soluţie. Arătăm că, dacă $n\geq 3$, atunci orice minor de ordin 3 este nul (**1 punct**). Luând $i=j=k$ rezultă $a_{ii}=0, \forall i$ (**1 punct**), iar $k=i\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0, \forall i,j$ (**1 punct**). Să considerăm un minor oarecare D de ordin 3, făcut cu elemente de pe liniile i,j,k şi coloanele p,q,r. În D, scăzând prima linie din a doua obţinem linia $L=(a_{jp}-a_{ip}, a_{jq}-a_{iq}, a_{jr}-a_{ir})$. Avem $a_{js}-a_{is}=a_{js}+a_{si}=-a_{ij}$ pentru $s=p,q,r$, deci linia L are elementele egale. Analog, linia obţinută prin scăderea primei linii din linia a treia are elemente egale. De aici, $D=0$ (**4 puncte**).

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit de $x_1=2, x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{1}{n}}$, $\forall n\geq 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n$.

Soluţie. Avem, inductiv, $1\leq x_n\leq 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (**1 punct**) şi $x_n\geq x_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (**1 punct**), deci şirul $(x_n)_n$ are o limită $L\geq 1$ care verifică relaţia $L=\sqrt{L}$, deci $L=1$ (**1 punct**).

Pentru a doua limită, scriem $x_n^n=u_n^{v_n}$, cu $u_n=(1+x_n-1)^{\frac{1}{x_n-1}}\to \mathrm{e}$ (**1 punct**), iar pentru limita şirului $v_n=n(x_n-1)$ observăm inductiv că $x_n\geq 1+\frac{1}{n}, \forall n\geq 5$ şi $x_n<1+\frac{1}{n-4}, \forall n\geq 5$, deci, din teorema cleştelui, $v_n\to 1$ (**3 puncte**).

Problema 4. a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=2[x]-\cos(3\pi\{x\})$ are proprietăţile: funcţia F este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y\in\mathbb{R}$, ecuaţia $F(x)=y$ are exact trei soluţii.

b) Fie $k>0$ un număr întreg par. Arătaţi că nu există nicio funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile: funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $y\in\operatorname{Im}f$, ecuaţia $f(x)=y$ are exact k soluţii.

Soluţie. a) Deoarece funcţia $[\cdot]$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, F este produs, compunere şi diferenţă de funcţii continue, deci este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (**1 punct**). În punctele $a\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\searrow a} F(x) = 2a - \cos 0 = 2a-1$, $\lim\limits_{x\nearrow a} F(x) = 2(a-1) - \cos 3\pi = 2a-1$, $F(a) = 2a-1$, deci F este continuă (**1 punct**). În plus, dacă $y\notin 2\mathbb{Z}+1$ ecuaţia $f(x)=y$ are trei soluţii, situate în intervalul $\left(\left[\frac{y+1}{2}\right], \left[\frac{y+1}{2}\right]+1\right)$, iar dacă $y\in 2\mathbb{Z}+1$ ecuaţia $f(x)=y$ are soluţiile $\frac{y+1}{2}$, $\frac{3y+7}{6}$ şi $\frac{3y-1}{6}$ (numărul soluţiilor se poate deduce şi urmărind graficul funcţiei F) (**1 punct**).

b) Să presupunem că există o astfel de funcţie. Fie $\lambda\in \mathrm{Im} f$ şi $x_1<x_2<\ldots<x_{2k}$ soluţiile ecuaţiei $f(x)=\lambda$. Atunci, pe fiecare din intervalele $I_0=(-\infty,x_1), I_1=(x_1,x_2),\ldots,I_{2k}=(x_{2k},\infty)$ diferenţa $d(x)=f(x)-\lambda$ are semn constant (**2 puncte**).

Dacă $d(x)$ are semnul „$+$" pe I_0 şi pe I_{2k}, atunci f este mărgintă inferior pe fiecare din intervalele $I_0, I_1,\ldots,I_{2k}$, deci pe $\mathbb{R}$. În plus, marginea inferioară $m=\inf f$ este atinsă în $[x_0,x_{2k}]$. Fie $t_1<t_2<\ldots<t_{2k}$ punctele în care se atinge marginea inferioară. În acest caz, alegând vecinătăţi disjuncte $V_1,V_2,\ldots,V_{2k}$ ale punctelor $t_1,t_2,\ldots,t_{2k}$ şi $y>m$, suficient de apropiat de m, găsim în fiecare V_i câte două soluţii ale ecuaţiei $f(x)=y$. Rezultă astfel cel puţin $4k$ soluţii ale ecuaţiei $f(x)=y$ – contradicţie. Cazul când $d(x)$ are semnul „$-$" pe I_0 şi pe I_{2k} se tratează analog (**1 punct**).

Dacă $d(x)$ are semne opuse pe I_0 şi I_{2k}, pe cel puţin k dintre cele $2k-1$ intervale $I_1,\ldots,I_{2k-1}$ funcţia $d(x)$ are acelaşi semn, de exemplu „$+$". În acest caz, pentru $y>\lambda$, suficient de apropiat de λ, ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin $2k$ soluţii pe $[x_0,x_{2k}]$ şi o soluţie pe I_0 sau I_{2k} – contradicţie (**1 punct**).